جامعة الفيوم
كلية : العـلوم
قسم :الرياضيات
الزمن: ٣ساعات

المادة : الهندسة الفراغية
الفرقة : الثانية {رياضيات}
الشعبة: تعليم عام
درجة التحريري: ١٤٠درجة

الاختبار النهائي للفصل الدراسي الثاني للعام الجامعي ٢٠٠٩/٢٠١٠

أجب عن الأسئلة التالية:

السؤال الأول: (٣٠درجة)

أ- عرف أثر السطح الثنائي – هل كل السطوح تكون سطوح ثنائية مع ذكر مثال.
(١٠درجات)

ب- إذا كانت $A_1=(x_1,y_1,z_1)$ **تقابل النقطة** $Q_1=\left(4,\frac{\Pi}{4},\frac{\Pi}{6}\right)$ **في الإحداثيات الكريه**

والنقطة $A_2=(x_2,y_2,z_2)$ **تقابل النقطة** $Q_2=\left(2,\frac{\Pi}{4},-2\right)$ **في الإحداثيات الأسطوانية فأوجد**

طول $\overline{A_1A_2}$ **.**

(١٢درجة)

ج- أوجد معادلة السطح الأسطواني الذي محوره محور y **ومقطعه بالمستوي** XZ **هو دائرة نصف قطرها** 3 **.**

(٨درجات)

السؤال الثاني:(٣٤درجة)

أ- أوجد مسقط المتجه $\underline{u}=2\underline{i}+\underline{j}-3\underline{k}$ **علي المتجه الذي له مجموعة أعداد اتجاه** $\{-2,4,-6\}$ **.**

(١٢درجة)

ب- حدد العلاقة بين الخطين المستقيمين

$$L_1: x=-2+2t \quad , \quad y=8t \quad , \quad z=-1+t$$
$$L_2: x=-2+s \quad , \quad y=3s \quad , \quad z=-1+4s$$

(١٠درجات)

ج- عين أي السطوح التالية سطوح مسطرة مع رسم أحدهم

a) $2x^2+3y^2-4z^2=0$ **b)** $3x-4y+2z=12$ **c)** $x^2+2y^2+6z^2=1$

(١٢درجة)

السؤال الثالث:(٢٨ درجة)

أ-عرف المستوي الأساسي لكرتين ثم أوجده للكرتين

$S_2: x^2+y^2+z^2-2x+4y-14=0$ $\quad$ $S_1: \vec{r}^{\,2}-2\vec{r}\cdot(3,-5,4)+1=0$ **(١٢درجة)**

ب- أوجد معادلة المخروط الناقصي القائم الذي محوره y **ورأسه نقطة الأصل ومقطعه بالمستوي** $y=2$
هو المنحني $3x^2+2z^2=12$

(٨درجات)

ج- أثبت أن المتجه $\underline{u}\times v$ **عمودي علي كلا من المتجهين الغير صفريين** $v,\underline{u}$

(٨درجات)

السؤال الرابع:(٢٨درجة)

أ- أدرس السطح الثنائي الممثل بالمعادلة $x^2+4y^2-16z=0$ مستعينا بالآثار $x=0$, $z=0$ مع تحديد نوعه وتعيين إحداثيات رؤوسه ورسمه. (٢٠ درجة)

ب- أوجد معادلة المستوي الذي يحتوي النقاط $A_3=(-1,2,1)$, $A_2=(1,1,1)$, $A_1=(0,0,0)$ (٨درجات)

السؤال الخامس: (٢٠درجة)

أ- أوجد طول القطعة المماسية المرسومة من النقطة $A=(2,0,0)$ إلي الكرة

$$x^2+y^2+z^2+2x-6y-4z-2=0$$

(١٠درجات)

ب- أوجد المعادلات المتماثلة للخط المستقيم الذي يمر بالنقطة $(2,4,-2)$ وعمودي علي المستوي $x-y=2$

(١٠درجات)

الإجابة النموذجية

إجابة السؤال الأول:

(١-أ)

أثر السطح الثنائي هو مقطعه بمستوي من مستويات الإسناد $z=0$, $y=0$, $x=0$

ليست كل السطوح سطوح ثنائية مثال ذلك السطح المستوي $Ax+By+Cz+D=0$

(١-ب)

حيث

$$Q_1=\left(4,\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{6}\right)$$
$$=(\rho,\theta,\phi)$$

$$\therefore x=\rho\sin\phi\cos\theta=4(\sin 30)\frac{1}{\sqrt{2}}=4\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}$$

$$y=\rho\sin\phi\sin\theta=4(\sin 30)\frac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

$$z=\rho\cos\phi=4(\cos 30^\circ)=2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow A_1=(\sqrt{2},\sqrt{2},2\sqrt{3})$$

$$Q_2=\left(2,\frac{\pi}{4},-2\right)$$
$$=(r,\theta,z)$$

$$\Rightarrow z=2 \quad , \quad x=r\cos\theta=2\frac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

$$y=r\sin\theta=\sqrt{2}$$

$$A_2=(\sqrt{2},\sqrt{2},-2)$$

$$\overline{A_1A_2}=\sqrt{(2+2\sqrt{3})^2}=2+2\sqrt{3}$$

(١-ج)

$$S:\{(x,y,z):x^2+z^2=9\}$$

إجابة السؤال الثاني:

(٢-أ)

$$\underline{u}=2\underline{i}+\underline{j}-3\underline{k}$$

$$\underline{v}_{\circ}=(-2,4,-6)//(2,-4,6)//(\underline{i}-2\underline{j}+3\underline{k})=\underline{v}$$

$$\underline{w}=|\underline{u}\cdot\underline{v}^{*}|\underline{v}^{*} \qquad , \qquad \underline{v}^{*}=\left(\frac{1,-2,3}{\sqrt{14}}\right)$$

$$\underline{u}\cdot\underline{v}^{*}=\frac{1}{\sqrt{14}}\{2-2-9\}=\frac{-9}{\sqrt{14}}$$

$$\underline{w}=\frac{9}{\sqrt{14}}\left(\frac{1,-2,3}{\sqrt{14}}\right)=\frac{9}{14}(1,-2,3)$$

$$\underline{w}=\left(\frac{9}{14},\frac{-9}{7},\frac{27}{14}\right)$$

(٢-ب)

$$L_1:A_1=(-2,0,-1) \qquad \underline{v}_1=(2,8,1)$$

$$L_2:A_2=(-2,0,-1) \qquad \underline{v}_2=(1,3,4)$$

$$\Rightarrow\therefore A_1=A_2\Rightarrow L_1\wedge L_2\neq\Phi$$

$\therefore$ **الخطين متقاطعين في النقطة** $(-2,0,-1)$

(٢-ج)

a) $2x^2+3y^2-4z^2=0\Rightarrow$ **مخروط ناقصي**

قائم محوره محور z **ورأسه** $(0,0,0)\Leftarrow$ **سطح مسطر**

b) $3x-4y+2z=12\Rightarrow$ **معادلة مستوي**

حيث العمودي عليه المتجه $(3,-4,2)\Leftarrow$ **سطح مسطر**

$y=0 \qquad z=6\Rightarrow(0,0,6)$

at $x=0\rightarrow -4y+2z=12$

$z=0 \qquad y=-3 \Rightarrow (0,-3,0)$

at $y=0 \rightarrow 3x+2z=12$

$x=0 \rightarrow (0,0,6)$

$z=0 \rightarrow (4,0,0)$

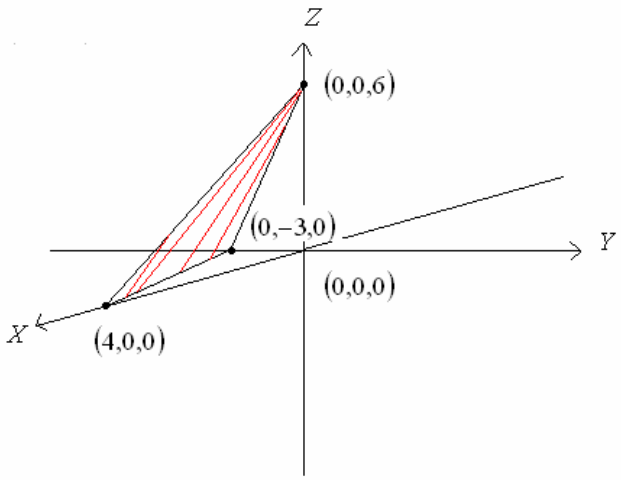
at $z=0 \rightarrow 3x-4y=12$

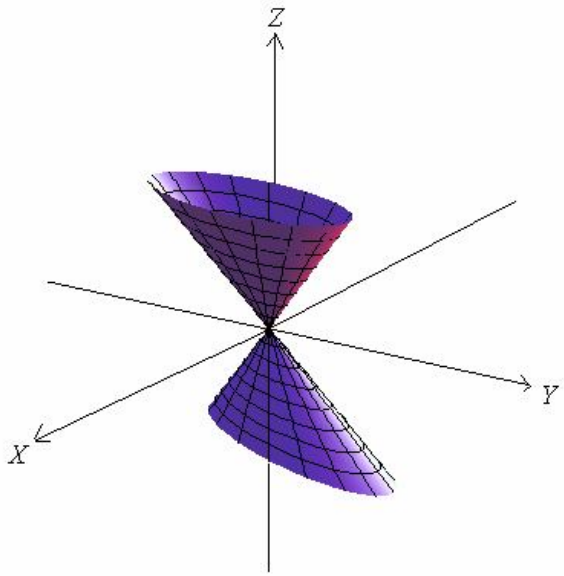
$x=0 \rightarrow (0,-3,0)$

$y=0 \rightarrow (4,0,0)$

c) $x^2+2y^2+6z^2=1 \Rightarrow$

سطح ناقصي أي أن جميع
مقاطعه قطاعات ناقصة $\Leftarrow$ سطح غير مسطر





إجابة السؤال الثالث:

(٣-أ)

المستوي الأساسي لكرتين هي المستوي الذي معادلته $S_1 - S_2 = 0$

وهو مستوي التقاطع المشترك إذا كانت الكرتان متقاطعتان

وهو مستوي التماس للكرتين إذا كانت الكرتان متماستان

$$S_1 - S_2 = \left(x^2 + y^2 + z^2\right) - 6x + 10y - 8z + 1$$
$$- \left\{x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 14\right\} = 0$$
$$\Rightarrow -4x + 6y - 8z + 15 = 0$$

(٣-ب)

$$\frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{6} = 1 = \left(\frac{y}{2}\right)^2$$
$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{6} = 0$$

(٣-ج)

البرهان

$$\underline{u} \cdot \left(\underline{u} \times \underline{v}\right) = \left(\underline{u} \times \underline{u}\right) \cdot \underline{v} = \underline{0} \cdot \underline{v} = 0$$
$$\underline{v} \cdot \left(\underline{u} \times \underline{v}\right) = -\underline{v} \cdot \left(\underline{v} \times \underline{u}\right) = -\left(\underline{v} \times \underline{v}\right) \cdot \underline{u} = 0$$

إجابة السؤال الرابع:

(٤-أ)

$$x^2+4y^2=16z$$

at $x=0\Rightarrow y^2=4z$

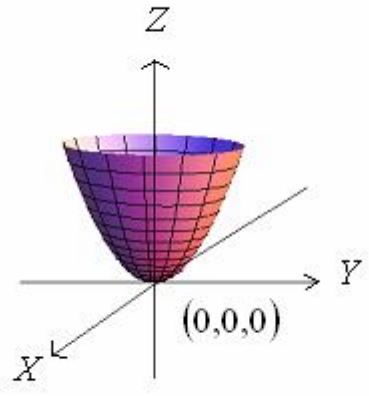
الأثر هو قطع مكافئ محوره محور z **ورأسه** $(0,0,0)$

الأثر هو النقطة $(0,0,0)$ **at** $z=0\Rightarrow\ x^2+4y^2-0\Rightarrow$

أي أنها رأس الجسم، $z=0$ **هو مستوي مماس له**

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=z$$

السطح هو السطح المكافئ ألناقصي الذي محوره محور z **ورأسه** $(0,0,0)$



(٤-ب)

$$\underline{v}_1=\overrightarrow{A_1A_2}=\underline{A}_2-\underline{A}_1=(1,1,1)$$
$$\underline{v}_2=\overrightarrow{A_1A_3}=\underline{A}_3-\underline{A}_1=(-1,2,1)$$

$$\underline{n} = \underline{v}_1 \times \underline{v}_2 = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -\underline{i} - 2\underline{j} + 3\underline{k}$$

$$\because \underline{n} = (A, B, C) = (-1, -2, 3)$$

أذن معادلة المستوي

$$A(x - x_\circ) + B(y - y_\circ) + C(z - z_\circ) = 0$$

و باختيار النقطة $A_1 = (0,0,0)$ **يمر بها**

$$\Rightarrow Ax + By + cz = 0$$
$$\Rightarrow -x - 2y + 3z = 0$$
$$x + 2y - 3z = 0$$

<u>إجابة السؤال الخامس:</u>

(٥-أ)

مربع طول القطعة المماسية المرسومة من النقطة A **إلي الكرة** $= 4 + 4 - 2 = 6$

$\therefore$ **طول القطعة المماسية المرسومة من النقطة** A **للكرة المعطاة** $= \sqrt{6}$

(٥-ب)

$$A = (2,4,-2) \quad , \quad \underline{v} = (1,-1,0)$$
$$\frac{x - x_\circ}{a} = \frac{y - y_\circ}{b} \quad , \quad z = z_\circ \quad , \quad c = 0$$
$$x - 2 = -(y - 4) \quad , \quad z = -2$$
$$\Rightarrow x + y = 6 \quad , \quad z = -2$$