جامعة الفيوم
كلية العلوم
شعبة الرياضيات

اختبار دور يناير للعام الجامعي 2011/2010

الوقت:3ساعات الفرقة:الرابعة

الدرجة:40درجة المادة:الهندسة التفاضلية الشعبة:رياضيات تعليم عام(لائحة قديمة)

أجب عن الأسئلة التالية:

السؤال الأول :(10درجات)

1عرف الانحناء واللي للمنحني الفراغي المنتظم من الفصل c^3 علي الأقل ثم أوجدهما للمنحني الفراغي الذي له التمثيل الباراميتري

$$\underline{r}(u) = u\underline{e}_1 + \frac{1}{3}u^3\underline{e}_3 \qquad , 0 \le u$$ (5 درجات)

2- أثبت أن متجه الانحناء $\underline{K}$ للمنحني $u = u(t)$ ، $v = v(t)$ (من الفصل التفاضلي c^2 علي الأقل) المعطي علي السطح المنتظم الذي له التمثيل الباراميتري $\underline{r}(u,v) = (u, v-u, v)$ يحقق العلاقة $\underline{K} = \underline{Kg}$

(5 درجات)

السؤال الثاني: (10درجات)

1- إذا كان المنحني الفراغي المنتظم الذي له التمثيل الطبيعي $\underline{r} = \underline{r}(s)$ من الفصل c^4 علي الأقل فأثبت أن

$$\left[\underline{r}^{\backslash\backslash}, \underline{r}^{\backslash\backslash\backslash}, \underline{r}^{\backslash\backslash\backslash\backslash}\right] = k^5 \frac{d}{ds}\left(\frac{\tau}{k}\right)$$

(5 درجات)

2- أثبت أن ثنائي العمودي عند النقطة $(1,6,3)$ عمودي علي ثنائي العمودي عند النقطة $(-8,-12,12)$ بالنسبة للمنحني الفراغي المنتظم $\underline{r}(u) = (u^3, 6u, 3u^2)$ وأوجد معادلة المستوي الملاصق عند النقطة $(-1,-6,3)$.

(5 درجات)

السؤال الثالث: (10درجات)

1- أوجد المسارات العمودية علي مقطع سطح المجسم المكافئ الزائدي الممثل باراميتريا بالعلاقة

$\underline{r} = \underline{r}(u,v) = (u, v, u^2 - v^2)$ بالمستوي $Z = const$ (5 درجات)

2-أوجد المعادلات الذاتية للمنحني الفراغي المنتظم الذي له التمثيل الطبيعي

$\underline{r}(\theta) = (a\cos\theta, a\sin\theta, b\theta) \quad , \quad a,b > 0 \quad , \quad a^2 + b^2 = 1$ (5 درجات)

السؤال الرابع: (10درجات)

1 –أحسب طول العمودي الساقط من النقطة $Q(1,1,2)$ علي المستوي المماسي لسطح المجسم المكافئ الناقصي الممثل باراميتريا بالعلاقة

$\underline{r} = \underline{r}(u,v) = (u, v, u^2 + v^2)$ عند النقطة $p(1,0,1)$.عين نوع النقطة p (5 درجات)

2-أوجد المنحني التكاملي للمجال المتجه X المعرف علي R^2 والذي نقطة بدايته $p = (1,1)$ حيث

$X(x_1, x_2) = (x_1, x_2, x_2, x_1)$ (5 درجات)

نموذج الإجابة

إجابة السؤل الأول:

(1) يعرف الأنحناء للمنحني الفراغي المنتظم من الفصل c^2 علي الأقل بأنه معدل دوران المماس بالنسبة إلي باراميتر طول القوس.

يعرف اللي للمنحني الفراغي من الفصل c^3 علي الأقل بأنه معدل دوران المستوي الملاصق بالنسبة إلي باراميتر طول الفوس

$$|k| = \frac{|\dot{\underline{r}} \wedge \ddot{\underline{r}}|}{|\dot{r}^3|}$$

$$|\tau| = \frac{[\dot{\underline{r}}, \ddot{\underline{r}}, \dddot{\underline{r}}]}{|\dot{\underline{r}} \wedge \ddot{\underline{r}}|^2}$$

$$\because \underline{r}(u) = u\underline{e}_1 + \frac{1}{3}u^3\underline{e}_3 \qquad (1)$$

$\therefore$ $\tau = 0$ لأن المنحني الفراغي المعطي بالعلاقة(1) منحني مستو

$$\dot{\underline{r}}(u) = (1,0,u^2)$$

$$\ddot{\underline{r}}(u) = (0,0,2u)$$

$$\dot{\underline{r}} \wedge \ddot{\underline{r}} = (0,-2u,0)$$

$$|\dot{\underline{r}} \wedge \ddot{\underline{r}}|^2 = 4u^2 \qquad , \qquad |\dot{\underline{r}}|^2 = 1 + u^4 \qquad , \qquad 0 \le u$$

$$|k| = \frac{2u}{(1+u^4)^{3/2}}$$

(2)

$$\because \underline{K} = \underline{K}_N + \underline{K}_g$$

$$\underline{K}_N = \left(\frac{du}{ds}\right)^2 \underline{r}_{11} + 2\left(\frac{du}{ds}\right)\left(\frac{dv}{ds}\right)\underline{r}_{12} + \left(\frac{dv}{ds}\right)^2 \underline{r}_{22}$$

$$\because \underline{r}(u,v) = (u, v-u, v) \Rightarrow \underline{r}_1 = (1,-1,0) \Rightarrow \underline{r}_{11} = \underline{0}, \underline{r}_{12} = \underline{0}$$

$\underline{r}_2 = (0,1,1) \Rightarrow \underline{r}_{22} = \underline{0} \Rightarrow \underline{K}_N = 0$ and $\underline{K} = \underline{K}_g$ and hence

إجابة السؤل الثاني:

(1)

$$\underline{t} = \underline{r}^{\prime}$$
$$\underline{r}^{\prime\prime} = |K|\underline{n}$$
$$\underline{r}^{\prime\prime\prime} = -K^2\underline{t} + |K\tau|\underline{b} + |K^{\prime}|\underline{n}$$
$$\underline{r}^{\prime\prime\prime\prime} = -3|kk^{\prime}|\underline{t} + \left(K^{\prime\prime} - |K^3| - \tau^2|K|\right)\underline{n} + \left(|\tau^{\prime}K| + 2|\tau K|^{\prime}\right)\underline{b}$$
$$\because \underline{r}^{\prime\prime} \wedge \underline{r}^{\prime\prime\prime} = K^2\left(|\tau|\underline{t} + |K|\underline{b}\right)$$
$$\left(\underline{r}^{\prime\prime} \wedge \underline{r}^{\prime\prime\prime}\right)\cdot \underline{r}^{\prime\prime\prime\prime} = K^3\left(|k\tau^{\prime}| - |\tau K^{\prime}|\right)$$
$$= k^5 \frac{d}{ds}\left(\frac{\tau}{K}\right)$$

(2)

$$\underline{r}(u) = \left(u^3, 6u, 3u^2\right)$$
$$\dot{\underline{r}} = \left(3u^2, 6, 6u\right) \Rightarrow |\dot{\underline{r}}| \neq 1$$ ∴ التمثيل المعطي للمنحني غير طبيعي
$$\ddot{\underline{r}} = (6u, 0, 6)$$
$$\because \underline{b} = \frac{\dot{\underline{r}} \wedge \ddot{\underline{r}}}{|\underline{r} \wedge \ddot{\underline{r}}|}$$
$$\dot{\underline{r}} \wedge \ddot{\underline{r}} = 18\left(2, u^2, -2u\right)$$
$$|\dot{\underline{r}} \wedge \ddot{\underline{r}}| = 18\sqrt{4 + 4u^2 + u^4} = 18\left(2 + u^2\right)$$
$$\underline{b}(u) = \frac{1}{2 + u^2}\left(2, u^2, -2u\right)$$

$\underline{b}$ $\quad (1,6,3) \Rightarrow \underline{b}(1) = \frac{1}{3}(2,1,-2)$ at

$\underline{b}$ $\quad (-8,-12,12) = \underline{b}(-2) = \frac{1}{6}(2,4,4) = \frac{1}{3}(1,2,2)$ at

$$\therefore \underline{b}(1)\cdot \underline{b}(-2) = \frac{1}{9}(0) \Rightarrow \underline{b}(1) \perp \underline{b}(-2)$$

معادلة المستوي الملاصق

$$\left(\underline{R} - \underline{r}_0\right)\cdot \underline{b} = 0$$
$$(x + 1, y + 6, z - 3)\cdot \underline{b}(-1) = 0$$
$$\Rightarrow 2x + y + 2z + 2 = 0$$

إجابة السؤال الثالث:

(1)

من شرط التعامد

$$(*)\ 0 = \mathrm{I}(d,\delta) = g_{11} du\delta u + g_{12}(du\delta v + \delta u dv) + g_{22} dv\delta v$$

$$\because \underline{r} = (u, v, u^2 - v^2)$$

$$\underline{r}_1 = (1,0,2u) \qquad , \qquad \underline{r}_2 = (0,1,-2v)$$

ومنها

$$g_{11} = 1 + 4u^2 \qquad , \qquad g_{12} = -4uv \qquad , \qquad g_{22} = 1 + 4v^2$$

وحيث أن

$$Z = const = u^2 - v^2$$

$$\Rightarrow (du, dv) = (v, u)$$

بالتعويض في العلاقة (*) نحصل علي

$$0 = \delta(uv)$$

$$\Rightarrow uv = const$$

أي أن المسارات المطلوبة هي قطاعات زائدية قائمة

(2)

$$\underline{r}(\theta) = (a\cos\theta, a\sin\theta, b\theta) \qquad a^2 + b^2 = 1$$

$$\because \dot{\underline{r}}(\theta) = (a\sin\theta, a\cos\theta, b) \Rightarrow |\dot{\underline{r}}|^2 = a^2 + b^2 = 1$$

أي ان التمثيل المعطي تمثيل طبيعي أي أن θ هي بارامتير طول القوس

$$|K| = |\underline{r}^{\backslash} \wedge \underline{r}^{\backslash\backslash}| \qquad , \qquad |\tau| = \frac{[\underline{r}^{\backslash}, \underline{r}^{\backslash\backslash}, \underline{r}^{\backslash\backslash\backslash}]}{|r^{\backslash} \wedge r^{\backslash\backslash}|^2}$$

$$\because \underline{r}^{\backslash} = (-a\sin\theta, a\cos\theta, b)$$

$$\underline{r}^{\backslash\backslash} = (-a\cos\theta, -a\sin\theta, 0) \qquad , \qquad \underline{r}^{\backslash\backslash\backslash} = (a\sin\theta, -a\cos\theta, 0)$$

$$\underline{r}^{\backslash} \wedge \underline{r}^{\backslash\backslash} = (ab\sin\theta, -ab\cos\theta, a^2)$$

$$|\underline{r}^{\backslash} \wedge \underline{r}^{\backslash\backslash}|^2 = a^2 \qquad , \qquad a^2 + b^2 = 1 \Rightarrow |K| = a$$

$$(\underline{r}^{\backslash} \wedge \underline{r}^{\backslash\backslash}) \cdot \underline{r}^{\backslash\backslash\backslash} = a^2 b$$

$$|\tau| = b$$

إجابة السؤال الرابع:

(1)

$$2h = \mathrm{II}(du, dv) = Ldu^2 + 2Mdudv + \mathrm{N}dv$$

$$\because Q(1,1,2) \qquad , \qquad P = (1.0.1) \Rightarrow du = 0 \qquad , \qquad dv = 1$$

$$\because \underline{r}(u,v) = (u, v, u^2 + v^2)$$

$$\underline{r}_1 = (1,0,2u) \Rightarrow \underline{r}_{11} = (0,0,2), \underline{r}_{12} = (0,0,0)$$

$$\underline{r}_2 = (0,1,2v) \Rightarrow \underline{r}_{22} = (0,0,2)$$

$$N = \frac{\underline{r}_1 \wedge \underline{r}_2}{|\underline{r}_1 \wedge \underline{r}_2|} = \frac{(-2u,-2v,1)}{\sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}} \quad \text{use}$$

$$M = 0 \qquad , \qquad L = \frac{2}{\sqrt{1 + 4u^2 + 4v^2}} = \mathrm{N}$$

ومنها

$$M = 0 \qquad , \qquad p : L = \frac{2}{\sqrt{5}} = \mathrm{N} \text{ at}$$

$$\because L\mathrm{N} - M^2 = \frac{4}{5} > 0 \qquad p \quad \text{is an elliptic point}$$

$$\therefore 2h = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow h = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

(2)

$$\dot{\alpha}(t) = X(\alpha(t))$$

$$x_1^{\cdot} = x_2 \qquad , \qquad x_2^{\cdot} = x_1$$

$$x_1^{\cdot\cdot} = x_1 \Rightarrow \lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1$$

$$x_1(t) = Ae^t + Be^{-t}$$

$$\Rightarrow x_2 = Ae^t - Be^{-t}$$

at $\quad t = 0 \quad , \quad x_1(0) = 1 \quad , \quad x_2(0) = 1 \Rightarrow A = 1 \quad , \quad B = 0$

$$\because \alpha(t) = (e^t, e^t)$$