جامعة الفيوم — الشعبة : رياضيات

كلية التربية (عام) — المادة : تحليل مركب

الفرقة الرابعة — الفصل الدارسي الثاني ٢٠١١ -٢٠١٢ — الزمن: ساعتان

أجب عن جميع الاسئلة الآتية :-

السؤال الاول: ضع علامة (√) مع البرهان أمام العبارات الصحيحة وعلامة (X) مع مثال أمام العبارات الخاطئة.

(١) إذا كانت $f(z) = u + iv$ دالة تحليلية فإن الدالتين u, v تكونان توافقتين في نفس المنطقة .

(٢) أي دالة متصلة عند نقطة ما تكون قابلة للاشتقاق عند نفس النقطة.

(٣) المعادلة العامة للدائرة $C(z_0; r)$ التي مركزها z_0 و نصف قطرها r تعطي من العلاقة:

$$|z|^2 - 2Re.(z\,\bar{z_0}) + |z_0|^2 = r^2.$$

(٤) إذا كانت الدالة $f = u + iv$ تكون تحليلية فإن الدالة $g = v + iu$ تكون تحليلية.

(٥) لأي دالة تحليلية $f(z) = u + iv$ وكان $|f(z)|$ مقدار ثابت فإن الدالة $f(z)$ نفسها ثابتة.

السؤال الثاني: (أ) ادرس النهايات الاتية :

$$(1)\ \ lim_{z\to 0}\frac{\bar{z}}{z} \qquad (2)\ lim_{z\to 0}\left(\frac{2xy}{x^2+y^2} - i\frac{2y^2}{x^2+y^2}\right).$$

(ب) مستخدما **طريقتان** أوجد المرافق التوافقي للدالة $u = ln\sqrt{x^2+y^2}$ ثم أكتب الدالة التحليلية $f(z) = u + iv$.

(ج) إذا كانت $C(0;3)$ دائرة مركزها نقطة الاصل ونصف قطرها يساوي 3 فاحسب

$$\oint_C \frac{\sin \pi z^2 + \cos \pi z^2}{(z-1)(z-2)}\,dz.$$

السؤال الثالث : (أ) اذكر مع البرهان الشرط الضروري لكي تكون $f(z)$ قابلة للاشتقاق عند نقطة z_0 .

(ب) إذا كانت $f(z)$ دالة تحليلية فأثبت أن :

$$(1)\ \left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)f = 0 \qquad (2)\ \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0.$$

السؤال الرابع : (أ) أثبت معادلتي كوشي- ريمان في الصورة القطبية ؟

(ب) لأي كنتور C يحتوي النقطة $-i$ في الأتجاه الموجب احسب $\oint_C \frac{z^4 - 3z^2 + 6}{(z+i)^3}\,dz$.

مع اطيب التمنيات بالتوفيق و النجاح