جـامعة الفــيـوم
كــلية العلـــوم
قسم الرياضـيات

دراسات على خواص فصول معينة من الدوال التحليلية مع تطبيقات للتبعية التفاضلية

رسالة مقدمة من

غادة محمد عبد الستار السيد

قسم الرياضيات

كلية العلوم - جامعة الفيوم

لاستيفاء متطلبات الحصول على

درجة دكتور الفلسفة فى العلوم

(الرياضيات البحتة - تحليل مركب)

٢٠٢٠

الملخص العربى

الهدف من هذه الرسالة تعريف ودراسة خصائص فصول من الدوال التحليلية (أحادية ومتعددة التكافؤ) المعرفة في قرص الوحدة المفتوح U حيث $U = \{z \in C : |z| < 1\}$ وقرص الوحدة المثقوب $\mathbb{U}^* = \mathbb{U}\backslash\{0\}$ فى المستوى المركب $\mathbb{C}$ وهذه الفصول معرفة باستخدام بعض المؤثرات الخطية والتكاملية وحاصل ضرب هادمرد (أوالالتفاف) والمؤثرات الفرقية q. وعرفنا فصول الدوال النجميه والمحدبه بانتظام، أيضا نرمز ب $\mathcal{P}_k, \mathcal{V}_k, \mathcal{U}_k (k \geq 2)$ للفصول الجزئية من $\mathbb{A}$ ذات الجزء الحقيقي الموجب والمحدود ، ذات الدورانات الحدية المحدودة، وذات الدورانات الحدية المحدودة السعة علي الترتيب ، وقد عرفها ودرسها كلا من ([١١٩]، [١٢٩])، وباستخدام مبدأ التبعية للدوال التحليلية سوف نحصل على نتائج للتبعية والمتبوعية التفاضيلية ونظرية الساندوتش للفصول المعرفة باستخدام المؤثرات $\mathbb{N}_{p,\lambda,\mu,\eta}^{m,\delta,\xi}$ و $\mathbb{H}_{p,\mu,\eta}^{\lambda\delta}$. وحصلنا على نظرية التشوه لفصول الدوال التحليلية الغير بازيليفية (Non-Bazilevic) متعددة التكافؤ المعرفة باستخدام مؤثرات خطية وحصلنا أيضا على نتائج التبعية المحافظة لفصول الدوال الميرومورفية متعددة التكافؤ المعرفة بمؤثرات مختلفة وأيضا حصلنا على بعض علاقات الاحتواء لفصول اخرى معرفة بمؤثرات خطية. وحصلنا على الشروط الضرورية والكافية للدوال الفوق هندسية لكي تنتمي لفصول جزئية من الدوال احادية التكافؤ والمنتظمة . وأخيرا درسنا متباينات الفكتى-سيزجو(Fekete-Szego) لكل من فصول الدوال الغير بازيليفية من الرتبة المركبة المعرفة بالدوال الأحادية والميرومورفية وحاصل ضرب هادمرد التى تحتوى على مؤثرات فرقية q.

تتكون هذه الرسالة من سبعة أبواب رئيسية:

<u>الباب الأول :</u>

وهو مقدمة للرسالة، ويحتوي على بعض التعريفات والنتائج والمبادئ الأولية والضرورية لاستكمال النتائج في الأبواب اللاحقة.

<u>الباب الثانى</u>:

يتكون هذا الباب من ثلاثة فصول :

الفصل الأول : وهو مقدمة للباب، و يحتوي على تعريف مؤثر $\mathbb{H}_{p,\eta,\mu}^{\lambda,\delta}$ (انظر [١٥٨]و [١٤٣] و[٢٣]) و أيضا المؤثر الخطي $\mathbb{N}_{p,\lambda,\mu,\eta}^{m,\delta,\xi}$ (انظر [٢٣]).

الفصل الثانى : يحتوي على نتائج ومبادئ أولية.

الفصل الثالث : درسنا خصائص مختلفة للتبعية والمتبوعية التفاضيلية ونظرية الساندوتش لفصول من الدوال المعرفة باستخدام المؤثرات $\mathbb{H}_{p,\eta,\mu}^{\lambda,\delta}$ و $\mathbb{N}_{p,\lambda,\mu,\eta}^{m,\delta,\xi}$.

الباب الثالث :

يتكون هذا الباب من خمسة فصول :

الفصل الأول : يحتوي على مقدمة له ويحتوي أيضا على تعريف المؤثرات الميرومورفية $\mathcal{H}_{p,\alpha,\beta}^{\gamma,c}$ (انظر [١٠١]و [٢٦]). وكذلك المؤثر التكاملي $I_{p,\mu}^{\delta}$ والمعرف كالآتي:

$$I_{p,\mu}^{\delta}f(z) = \frac{1}{(1-\mu)^{\delta+1}\Gamma(\delta+1)}\int_{0}^{\infty} t^{\delta+p}\, e^{-\left(\frac{t}{1-\mu}\right)} f(zt)dt$$
$$= z^{-p} + \sum_{k=m}^{\infty} \frac{\Gamma(\delta+k+1+p)}{\Gamma(\delta+1)}(1-\mu)^{k+p}a_k z^k.$$

حيث $\mathrm{p} \in \mathbb{N}, 0 \le \delta \le 1, 0 \le \mu < 1, f(z) \in \Sigma_{p,m}$.

الفصل الثاني: يحتوي على نتائج ومبادئ أولية.

الفصل الثالث: باستخدام مبدأ التبعية حصلنا على نتائج احتواء للفصل المعرف بالمؤثر $\mathcal{H}_{p,\alpha,\beta}^{\gamma,c}$.

الفصل الرابع: باستخدام مبدأ التبعية حصلنا على نتائج احتواء للفصل المعرف بالمؤثر $I_{p,\mu}^{\delta}$.

الفصل الخامس: فى هذا الفصل حصلنا على نتائج لنظرية الساندوتش المحافظة للدوال المعرفة باستخدام المؤثر $I_{p,\mu}^{\delta}$.

الباب الرابع : يتكون هذا الباب من ثلاثة فصول:

الفصل الأول : يحتوي على مقدمة له، ويحتوي أيضا على تعريف المؤثر $D_{\lambda,p,l}^{m}$ (انظر[٢٠])

وباستخدام هذا المؤثر عرفنا فصول جزئية وهى:

$$S_{p,\lambda,l}^{*(m)}(\gamma), K_{p,\lambda,l}^{m}(\gamma), C_{p,\lambda,l}^{m}(\theta,\gamma), C_{p,\lambda,l}^{*(m)}(\theta,\gamma).$$

في الفصل الثاني : حصلنا على بعض علاقات الاحتواء للفصول

$$S_{p,\lambda,l}^{*(m)}(\gamma), K_{p,\lambda,l}^{m}(\gamma), C_{p,\lambda,l}^{m}(\theta,\gamma), C_{p,\lambda,l}^{*(m)}(\theta,\gamma).$$

في الفصل الثالث : حصلنا على بعض علاقات الاحتواء التي تحتوى المؤثر $J_{c,p}$ **.** والمعرف كما يلى

$$J_{c,p}f(z) = \frac{c+p}{z^c}\int_0^z t^{c-1}f(t)dt \ (c > -p).$$

الباب الخامس :

يتكون هذا الباب من أربعة فصول :

الفصل الأول : يحتوي على مقدمة له وباستخدام المؤثر $D_{\lambda,p,l}^{m}$ والفصول

$\mathcal{R}_k(p,\gamma), V_k(p,\gamma), T_k(p,\gamma,\beta), T_k^*(p,\gamma,\beta)$ المكونة من الدوال ذات الدورانات الحدية المحدودة وذات الدورانات الحدية المحدودة السعة (انظر [١٤١] وعندما p=1 انظر [١٠٧]) عرفنا الفصول الجزئية من الدوال التحليلية

$$.\mathcal{R}_{\lambda,p,l}^{m}(k,\gamma), V_{\lambda,p,l}^{m}(k,\gamma), T_{\lambda,p,l}^{m}(k,\gamma,\beta), T_{\lambda,p,l}^{*(m)}(k,\gamma,\beta).$$

وأيضا عرفنا المؤثر $N_p^{\alpha,\delta}$ كالآتى

$$N_p^{\alpha,\delta}f(z) = z^p + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+p+1}{p+1}\right)^{\alpha}\frac{(p+\delta)_n}{(1)_n}a_{n+p}z^{n+p}.$$

وباستخدام هذا المؤثر عرفنا الفصول الجزئية:

$$\mathcal{R}_p^{\alpha,\delta}(k,\gamma), V_p^{\alpha,\delta}(k,\gamma), T_p^{\alpha,\delta}(k,\gamma,\beta), T_p^{*(\alpha,\delta)}(k,\gamma,\beta).$$

في الفصل الثاني : أوجدنا بعض علاقات الأحتواء للفصول

$$\mathcal{R}_{\lambda,p,l}^{m}(k,\gamma), V_{\lambda,p,l}^{m}(k,\gamma), T_{\lambda,p,l}^{m}(k,\gamma,\beta), T_{\lambda,p,l}^{*(m)}(k,\gamma,\beta).$$

في الفصل الثالث : اوجدنا بعض علاقات الأحتواء التى تحتوى المؤثر $J_{c,p}$

$$J_{c,p}f(z) = \frac{c+p}{z^c}\int_0^z t^{c-1}f(t)dt (c > -p).$$

في الفصل الرابع : حصلنا على بعض علاقات الاحتواء للفصول

$$\mathcal{R}_{p}^{\alpha,\delta}(k,\gamma), V_{p}^{\alpha,\delta}(k,\gamma), T_{p}^{\alpha,\delta}(k,\gamma,\beta), T_{p}^{*(\alpha,\delta)}(k,\gamma,\beta).$$

الباب السادس :

يتكون هذا الباب من ثلاثة فصول:

الفصل الأول : يحتوي على مقدمة له ويحتوي على تعريف الفصول $S_p(\lambda,\alpha,\beta), \mathcal{N}^*(\lambda,\alpha,\beta)$ كالآتى

بفرض أن S $0 \leq \lambda, 0 \leq \alpha < 1, 0 < \beta \leq 1, z \in \mathbb{U}, f(z) \in S$. $\mathcal{N}^*(\lambda,\alpha,\beta)$ يتكون من الدوال التى تحقق

$$\left| \frac{\dfrac{zf'(z) + \lambda z^2 f''(z)}{(1-\lambda)f(z) + \lambda z f'(z)} - 1}{\dfrac{zf'(z) + \lambda z^2 f''(z)}{(1-\lambda)f(z) + \lambda z f'(z)} + 1 - 2\alpha} \right| < \beta$$

و

$$T^*(\lambda,\alpha,\beta) = \mathcal{N}^*(\lambda,\alpha,\beta) \cap \mathbb{T}.$$

وبفرض أن $-1 \leq \alpha < 1, \beta \geq 0, 0 \leq \lambda < 1, f(z) \in S$ نقدم تعريف الفصل $S_p(\lambda,\alpha,\beta)$ (انظر [١٠٣]) المتكون من الدوال $f(z)$ التي تحقق

$$\mathcal{R}e\left\{\frac{zf'(z)}{(1-\lambda)f(z) + \lambda z f'(z)} - \alpha\right\} > \beta \left|\frac{zf'(z)}{(1-\lambda)f(z) + \lambda z f'(z)} - 1\right|$$

و

$$TS_p(\lambda,\alpha,\beta)=S_p(\lambda,\alpha,\beta)\cap\mathbb{T}.$$

في الفصل الثاني : حصلنا على الشرط الضروري و الكافي للدالة الفوق هندسية لكي تنتمي للفصل $T^*(\lambda,\alpha,\beta)$ والشرط الكافي للدالة الفوق هندسية لكي تنتمي لفصل $\mathcal{N}^*(\lambda,\alpha,\beta)$.

في الفصل الثالث : حصلنا على الشرط الضروري و الكافي للدالة الفوق هندسية لكي تنتمي للفصل $TS_p(\lambda,\alpha,\beta)$ والشرط الكافي للدالة الفوق هندسية لكي تنتمي لفصل $S_p(\lambda,\alpha,\beta)$.

<u>الباب السابع :</u>

يتكون هذا الباب من ثلاثة فصول:

الفصل الأول : يتكون هذا الفصل من جزئين:

الجزء الأول : يحتوي على مقدمة له وبعض النتائج الأولية وتعريف الفصل $R_g^{\alpha,\gamma}(b,\phi)(b\in\mathbb{C}^*,\gamma\in\mathbb{C}\,,0<\alpha<1)$ المكون من الدوال التى تنتمي الى S وتحقق شرط التبعية الآتي:

$$1+\frac{1}{b}\left\{(1+\gamma)\left(\frac{z}{(f*g)(z)}\right)^{\alpha}-\gamma\frac{z\big((f*g)(z)\big)'}{(f*g)(z)}\left(\frac{z}{(f*g)(z)}\right)^{\alpha}-1\right\}\prec\phi(z).$$

الجزء الثاني : به حصلنا على نتائج الفكتى-سيزجو (Fekete-Szego) للفصل $R_g^{\alpha,\gamma}$ (b, ϕ) .

الفصل الثاني : يتكون هذا الفصل من جزئين:

الجزء الأول : يحتوي على مقدمة للفصل الثاني وتعريف الفصل

$S_{\lambda,b}^*(q,\phi)(0\le\lambda<1,\mathrm{b}\in\mathbb{C}^*,0<\mathrm{q}<1)$, والمتكون من الدوال التى تحقق

$$1+\frac{1}{b}\left[\frac{zD_qf(z)}{(1-\lambda)f(z)+\lambda zD_qf(z)}-1\right]\prec\phi(\mathrm{z}),$$

حيث $D_q\mathrm{f}(z)$ هوالمؤثر الفرقي -q للدالة $f(z)$ (انظر[٥٨] و [٥٩]و[٤])

$$D_qf(z)=\frac{f(qz)-f(z)}{(q-1)z}=1+\sum_{k=2}^{\infty}[k]_q\,a_kz^{k-1}z\neq0.$$

حيث

$$[k]_q = \frac{1-q^k}{1-q}.$$

عندما $q \to 1^-, [k]_q \to \mathrm{k}$, so $\lim_{q\to 1^-} D_q\, f(z) = f'(\mathrm{z})$.

الجزء الثاني : به حصلنا على نتائج الفكتى-سيزجو(*Fekete-Szego*) للفصل $S^*_{\lambda,b}(q,\phi)$.

الفصل الثالث : يتكون هذا الفصل من جزئين:

الجزء الأول : يحتوي على مقدمة للفصل الثالث ويحتوى على التعريفات الآتية:

الدالة التى تنتمي الىΣ يقال أنها تنتمي للفصل

$$\Sigma^*_b(\alpha,q,\phi)(b \in \mathbb{C}^*, \alpha \in \mathbb{C}\backslash(0,1], 0 < q < 1)$$

إذا كان وكان فقط

$$1 + \frac{1}{b}\left[\frac{-\left(1-\frac{\alpha}{q}\right) qzD^*_q f(z) + \alpha qzD^*_q\left[zD^*_q f(z)\right]}{\left(1-\frac{\alpha}{q}\right) f(z) - \alpha zD^*_q f(z)} - 1\right] \prec \phi(z)\ (b \in \mathbb{C}^*, \alpha \in \mathbb{C}\backslash(0,1], 0 < q < 1)$$

وتكون فى الفصل $\Sigma^*_b(q,\phi)(b \in \mathbb{C}^*, 0 < q < 1)$ إذا كان وكان فقط

$$1 - \frac{1}{b}\left[\frac{qzD^*_q f(z)}{f(z)} + 1\right] \prec \phi(z)(b \in \mathbb{C}^*, 0 < q < 1),$$

حيث $D^*_q f(z)$ هو المؤثر الفرقي- q للدوال الميرومورفية (انظر[٤٩] و [١٠٢] و [١٥٩]) حيث

$$D^*_q f(z) = \frac{f(qz) - f(z)}{(q-1)z}, (z \in \mathbb{U}^*; 0 < q < 1),$$

$$= -\frac{1}{qz^2} + \sum_{k=0}^{\infty} [k]_q a_k\, z^{k-1}, z \neq 0,$$

حيث

$$[k]_q = \frac{1-q^k}{1-q}(0 < q < 1).$$

عندما

$$q \to 1^-, [k]_q \to \mathrm{k}, \text{so } \lim_{q\to 1^-} D_q^* \mathrm{f(z)} = f'(\mathrm{z}).$$

الجزء الثاني : به حصلنا على نتائج الفكتى-سيزجو(*Fekete-Szego*) للفصول $\Sigma_b^*(\alpha, q, \phi)$ و $\Sigma_b^*(q, \phi)$.