عن قوى الرسوم والترقيمات

رسالة مقدمة من الطالب

حمدي محمد حافظ عبدالعزيز

قسم العلوم الأساسية– كلية الحاسبات والمعلومات

جامعة الفيوم

لاستيفاء متطلبات الحصول على درجة الماجستير

(الرياضيات البحتة –نظرية الرسوم)

المشرفان

أ.د. محمد عبدالعظيم سعود د. محمود صبري سيف

أستاذ الرياضيات البحتة المتفرغ أستاذ مساعد الرياضيات البحتة المتفرغ

قسم الرياضيات - كلية العلوم قسم الرياضيات - كلية العلوم

جامعة عين شمس جامعة الفيوم

٢٠١٨

عن قوى الرسوم والترقيمات

رسالة مقدمة من الطالب

حمدي محمد حافظ عبدالعزيز

قسم العلوم الأساسية– كلية الحاسبات والمعلومات

جامعة الفيوم

لاستيفاء متطلبات الحصول على درجة الماجستير

(الرياضيات البحتة –نظرية الرسوم)

المشرفان

أ.د. محمد عبدالعظيم سعود د. محمود صبري سيف

أستاذ الرياضيات البحتة المتفرغ أستاذ مساعد الرياضيات البحتة المتفرغ

قسم الرياضيات - كلية العلوم قسم الرياضيات - كلية العلوم

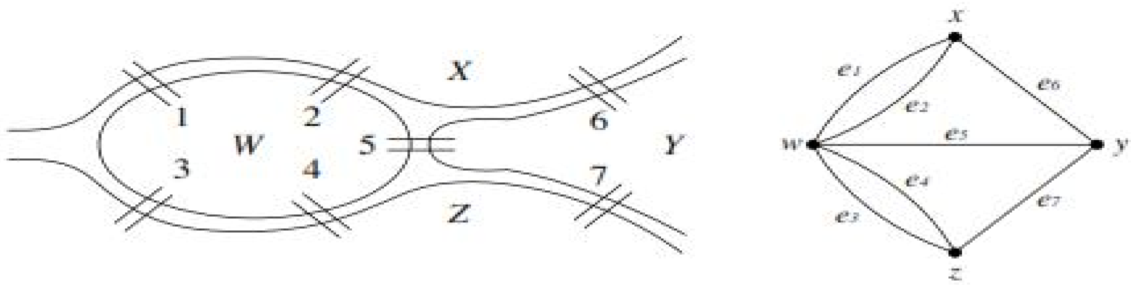
جامعة عين شمسجامعة الفيوم

ملخص الرسالة باللغة العربية

عن قوى الرسوم والترقيمات

تشهد نظرية الرسوم تطوراً سريعاً ،كما يزداد الاهتمام بها من الناحيتين النظرية والتطبيقية. ويعود ذلك إلى علاقتها الوثيقة بمعظم فروع الرياضيات الأخرى وإلى تطبيقاتها في مجالات متعددة لعلوم الحاسب والعلوم الطبيعية. تعتبر نظرية الرسوم وسيلة مهمة لإنشاء نماذج رياضية لدراسة هذه العلوم المختلفة.

يُعدُّ البحث الذيكتبه (Euler) ونشره فيعام 1736 حول موضوع جسور كونيجسبرج السبعة(تقع مدينة كونيجسبرج(Königsberg)على نهر برجِل (Pregel) في بروسيا، وتتكون هذه المدينة من جزيرتين، ومساحات على ضفتي النهر. وقد وُصلت هذه المناطق بسبعة جسور، كما هو موضحعلى اليسار بالشكل أدناه، وتساءل مواطنو المدينة عما اذا كان بإمكانهم مغادرة منازلهم، والسير على كل جسر من الجسور السبعة مرة واحدة فقط، ثم العودةإلى منازلهم،وقد اُختزلت المسألة على تتبع الرسم الأيمنبالشكلأدناه حيث تمثل النقاط الكتل اليابسة، اما المنحنيات، فتمثل الجسور) كان هذاالبحث أول بحث في التاريخ في نظرية الرسوم . بالإضافةإلى المقالة التي كتبها (Vandermonde) عن مسألة الفارس(إذا وضع فارس على إحدى مربعات رقعة الشطرنج هل بامكانهأن يزور كل من المربعات الأخرى مرة واحدة فقط ويعود إلى مكان انطلاقه).



الشكل ١: يوضح مسألة جسوركونيجسبرجالسبعة

من مسائل نظرية الرسوم القديمة الأخرى مسألة الألوان الأربعة التي طرحها (Guthrie) عام (1852) وتنص على أن (هل صحيح أن أية خريطة يمكن تلوينها فقط بأربعةألوان بحيث إن أية منطقتين متجاورتين سيكون لهما لونان مختلفان؟لايعتبر المنطقتان متجاورتين إذا اشتركتا في نقطة واحدة، بل تكون

المنطقتان متجاورتين إذا اشتركتا في خط، أياً كان شكل هذا الخط). بقيت هذه المسألة بدون برهان لأكثر من قرن حتى استطاع (Heesch)إيجاد حل بمساعدة الحاسوب عام (1976).

على الرغم من استخدامالرسوم في كثير من مجالات الحياة إلا أنها لم تدرس بحد ذاتها حتى العام (1936) حيث ألف (König)كتاباً أسماه نظرية الرسوم. وأصبحت من بعده نظرية الرسوم فرعاً من فروع الرياضيات يُبحث من خلاله عن حلول في مختلف المجالات.

في هذه الرسالة نقوم بدراسة مسألتين في نظرية الرسوم وهما قوى الرسوم (power graphs) و ترقيم الرسوم(graph labeling).

تُعرف قوى الرسم G ويرمز لها بالرمز $G^r, r = 2,3,...$بأنها الرسوم التي لها رؤوس الرسم G نفسه حيث يكون الرأس u متصلاً بالرأسv اذا كانت المسافة بينهما (المسافة هنا تعني طول اقصر مسار بين الرأسين) أقل من أو تساوي r.

نقوم هنا بدراسة قوى بعض العمليات على الرسوم.

يُعد ترقيم الرسوم من أشهر الموضوعات البحثية في نظرية الرسوم. معظم طرائق ترقيم الرسوم تعود إلى الترقيمات التي قدمها (Rosa) عام (1963). أحد هذه الترقيمات هو الترقيم المفضل(graceful labeling)والذي وضع كوسيلة لحل تكهن(Ringel) ،الذي ينص على أن الرسم الكاملK_{2m+1} يمكن تحليله إلى 2m+1 نسخة من شجرة بحجم m(تحليل الرسم G يعني مجموعة الرسوم الجزئية$H_1, H_2, \dots, H_n$ بحيث إن كل حافة من حواف الرسم G تنتمي الى رسم واحد فقط من الرسوم$H_1, H_2, \dots, H_n$).هناك طرائق مختلفة لترقيم الرسوم منها الترقيم المفضل (graceful labeling)، والترقيم التوافقي (harmonious labeling)، والترقيم القلبي(الكورديالي)(cordial labeling).

نقوم هنا بدراسة ترقيم ذي صلة بالترقيم المفضل والذي يعد كوسيلة لحل تكهن(Ringel) كما يعد وسيلةً لحلتكهنآخر يعود إلى (Graham and Häggkvist) والذييتسائل عن تحليل الرسم ثنائي التجزئةالكامل (complete bipartite $K_{m,m}$ graph)إلى رسوم ثنائية التجزئة بحجم مناسب.

تقع الرسالة في ثلاثة فصول. يشتمل الفصل الأول علىالتعاريف والمصطلحات والنتائج الأساسية المستخدمة في الفصول اللاحقة.

بينما يتضمن الفصل الثاني النتائج التي حصلنا عليها عن قوى بعض العمليات على الرسوم ويمكن تلخيصها كالتالي:

بافتراض أن$G * H$ تمثل عملية الضرب $*$ بين الرسم G والرسم H. فإننا نقوم بحساب قوى الرسم $(G * H)^r$ ،حيث r عدد صحيح موجب أكبر من أو يساوي ٢ ،و العملية$*$ تمثل عملية الإتصال(join)أو الضرب الديكارتي (Cartesian product)أوالتركيب (composition product) وغيرها من عمليات الضرب، على صورة كل من الرسوم G^r, H^r وعملية الضرب $*$ بينهما. ثم نقوم بعد ذلك بحل المعادلة$(G * H)^r = G^r * H^r$.

أما الفصل الثالث فيحتوي على النتائج التي حصلنا عليهافي موضوع الترقيم التوافقي الفردي للرسوم ومنها:

يكون الرسم توافقياً فردياً (odd harmonious)إذا وفقط إذا كان مفضلاً ثنائياً (bigraceful).

إذا كان الرسم توافقياً فردياً قوياً(strongly odd harmonious) يكون له ترقيم ألفا (alpha labeling).

إذا كانت T_1, T_2 شجرتين توافقيتنفرديتين قويتين (strongly odd harmonious) فإن الضرب الديكارتي$T_1 \times T_2$ يكون توافقياً فردياً قوياً كذلك.